Μαθημα 5ο 15/3/2017

Τοπολογια

Ειδαμε προηγουμενη φορα...

(E,ρ) μ.χ , $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq E$, $x \in E$:

$\rho(x,A) = \rho(x,\bar{A})$, $A \subseteq \bar{A}$ τοτε $\rho(x,\bar{A}) \leq \rho(x,A)$

θα δειξουμε οτι

$\rho(x,\bar{A}) \geq \rho(x,A)$

Λυση:

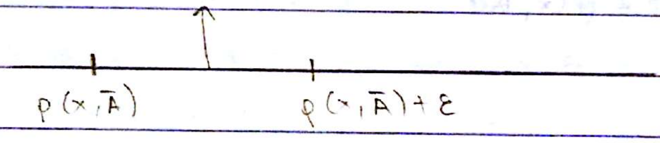
$\rho(x,\bar{A}) := \inf\{\rho(x,b) : b \in \bar{A}\} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\rho(x,\bar{A}) \geq$;

Αν $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, b \in \bar{A} : \rho(x,b) < \rho(x,\bar{A}) + \varepsilon \Rightarrow$

$\rho(x,\bar{A}) > \rho(x,b) - \varepsilon$ (1)

{ Αν $b \in A$ και οχι $b \in \bar{A}$ τοτε $\rho(x,b) \geq \rho(x,A)$ } παρενθεση



Τα δεδομενα τωρα ειναι $b \in \bar{A}$, $a \in A$ $\rho(a,b) < \varepsilon$

Εφοσον $b \in \bar{A} \Rightarrow B(b,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a \in A : \rho(a,b) < \varepsilon$, $a \in A$

Θελουμε το $\rho(x,b) \geq \rho(x,a) - \rho(a,b)$ (τριγ. ανισ)

$\Rightarrow \rho(x,b) > \rho(x,a) - \varepsilon \geq \rho(x,A) - \varepsilon \geq \rho(x,A) - \varepsilon - \varepsilon$

οποτε εχουμε οτι $\rho(x,\bar{A}) \geq \rho(x,A) - 2\varepsilon$ οταν $\lim_{\varepsilon \to 0^+}(2\varepsilon) = 0$

συνεπως $\rho(x,\bar{A}) \geq \rho(x,A)$

Δηλαδη δημιουργησαμε μια ανισοτητα με το $\rho(x,b)$ και κανουμε αντικατασταση στην (1)

Ασκηση 1

(E, ρ) μετρικος χωρος, $a \in E$ και $A = \{a\}$

Θελω να δειξω οτι $\bar{A} = \{a\}$

Λυση

$\bar{A} \supseteq A = \{a\} \Rightarrow a \in \bar{A}$

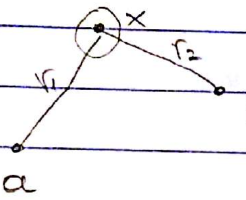
Αρκει νδο αν $x \in \bar{A} \Rightarrow x = a$, $A = \{a\}$

$\Rightarrow \forall r>0 \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \forall r>0 \ a \in B(x,r) \Rightarrow$

$0 \leq \rho(a,x) < r \ \forall r>0 \Rightarrow \rho(a,x) = 0 \Rightarrow x = a$ οποτε $\bar{A} = \{a\}$

⊛ Στην ιδια ασκηση αν $A = \{a, b\}$ τοτε $\bar{A} =$; Σπιτι!

$r_1 > r_2$



(?) (?)

$x \neq a$, $x \neq b$ τοτε $x \in \overline{\{a b\}}$

μπορει να συμβει;

$r_1 = \rho(x,a) > 0$, $r_2 = \rho(x,b) > 0$, $r < \min\{r_1, r_2\} = r_2$, $r > 0$

$B(x,r) \cap \{a b\} \neq \emptyset$ ισχυει αυτο για το r το συγκεκριμενο;

με $x \in \bar{A}$ $y \in$

τοτε $\rho(x,y) < r$ $y = a$ ή $y = b$ δεν μπορει να ισχυει αυτο.

Συνεπως $\bar{A} = A$

⊛ Αλλος τροπος για να το δειξω:

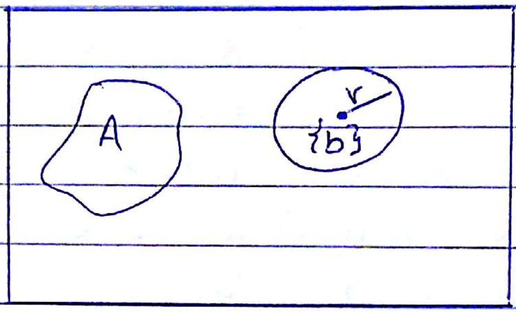
$$\overline{\{a,b\}} = \overline{\{a\} \cup \{b\}} = \overline{\{a\}} \cup \overline{\{b\}} = \{a\} \cup \{b\} = A$$

Κατι εισαγωγικο πριν τον ορισμο!

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

$b \in \bar{B}$;

$B = A \cup \{b\}$

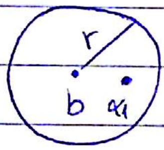


$b \in B \Rightarrow b \in \bar{B}$

$B(b,r) \cap B = \{b\}$, b μεμονωμενο σημειο

Τελικα $b \in \bar{B}$ ισχυει

Το εντελως αντιθετο του μεμονωμενου



$\forall r > 0$, $b \in A$

$A \subseteq (E,\rho)$ με (E,ρ) μ.χ

$a_1 \in A$ και $b \neq a_1$

Κανω πιο μικρη την περιοχη γυρω απο το κεντρο και βρισκω και αλλο σημειο $a_2 \neq b$ με μικροτερη αποσταση

Ορισμος: Το b θα λεγεται σημειο συσσωρευσης του $A \subseteq (E,\rho)$ αν $\forall r > 0$: $\underbrace{(B(b,r) - \{b\})}_{\Downarrow} \cap A \neq \emptyset$

Συμβολισμος: $\underline{B}(b,r)$

Scanned by CamScanner

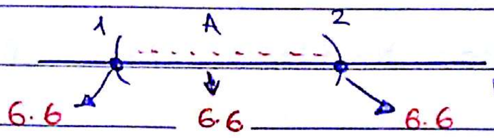
! Το συνολο των σ.σ του A συμβολιζεται με A'

Ερωτηση: Αν $b \in A' \Rightarrow b \in A$?

π.χ

$A = (1,2)$ τοτε $\bar{A} = [1,2]$, $A' = ;$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in A' \\ 2 \in A' \end{array}\right\} A' = [1,2]$$



! $b \in \bar{A}$ και $b \in A'$. Ποιο ειναι πιο δυνατο;

ισχυει οτι $A' \subseteq \bar{A}$ $(b \in A' \Rightarrow b \in \bar{A})$

$$A' \subseteq \bar{A}$$

Προταση

Σημειο Συσσωρευσης ⇒ Πιο δυνατο

$A' \cup A = \bar{A}$

Αποδειξη

Αρχικα $A' \cup A \subseteq \bar{A}$ (1) ισχυει αυτο γιατι $\left.\begin{array}{l} A' \subseteq \bar{A} \\ A \subseteq \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \bar{A}$

Επιπλεον $\bar{A} \subseteq A \cup A'$

Εστω $\underbrace{x \in \bar{A}}_{\text{Υποθεση 1}}$ θα δειξουμε οτι $x \in A \cup A'$

Επισης, εστω οτι $\underbrace{x \notin A}_{\text{Υποθεση 2}} \overset{?}{\Rightarrow} x \in A'$

$x \in \bar{A} \Rightarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

Στοχος μας: $(B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

αυτο ισχυει γιατι $x \notin A$ (φανερο!!!)

Τελικα $\bar{A} = \underbrace{A \cup A'}$

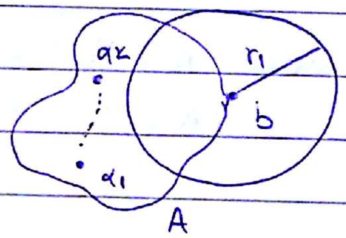
Δεν ειναι απαραιτητα ξενη ενωση

Ορισμος Εστω $b \in A$ θα λεγεται **μεμονωμενο σημειο** του A
αν.ν b δεν ειναι σ.σ του A
(ορισμος)

Ισοδυναμος ορισμος:
$b \in A' \iff \forall U(b)$ περιοχη του b : $(U(b) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$

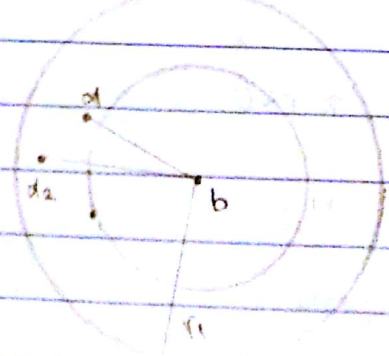
Προταση
Εστω (E,ρ) μ.χ , $A \subseteq E$ και $A \neq \emptyset$, $b \in E$
Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα
1. $b \in A'$ 3. $\forall U(b)$ περιοχη του b : $U(b) \cap A$ απειρο (ορισμος-περιοχη)
2. $\forall r_1 > 0$ $B(b, r_1) \cap A$ απειρο

Αποδειξη:
$(1 \Rightarrow 2)$ $b \in A' \Rightarrow \forall r > 0$ $(B(b,r) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$ (ορισμος)



Σταθερο $r_1 > 0$ οδο
$B(b,r) \cap A$ απειρο

Εστω οτι δεν ειναι απειρο , τοτε $B(b,r) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
χωρις βλαβη της γενικοτητας $a_i \neq b$ $\forall$ $i = 1,2,\dots,k$
$r_0 = \min\{r, \rho(b,a_1), \rho(b,a_2), \dots, \rho(b,a_k)\}$
$r_0' = \frac{r_0}{2}$. θεωραμε $B(b, r_0') = B(b, r_0/2)$



$a_i \notin B\left(b, \frac{r_0}{2}\right)$ $\forall i = 1,2,\dots,n$

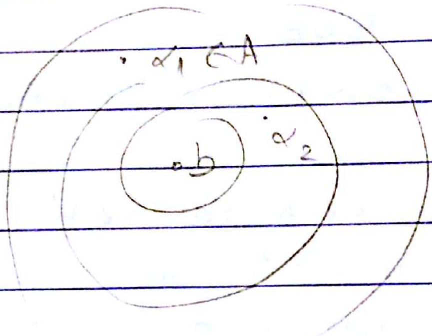
Τοτε $B(b, \frac{r_0}{2}) \cap A = \emptyset$ ή $\{b\} \Rightarrow (B(b, \frac{r_0}{2}) - \{b\}) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow b \notin A'$ ατοπο

$(2 \Rightarrow 1)$ $B(b,r) \cap A$ απειρο $\forall r>0$ τοτε $b \in A'$

αν $r>0$ τυχαιο $(B(b,r) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$ } θελω να το δειξω

συνεπαγεται λοιπον το $B(b,r) \cap A$ απειρο $\forall r>0 \Rightarrow b \in A'$



$1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

παρενθεση

$A' = \emptyset$ → Δεν μπορει να εχει σ.σ

$\Uparrow$ (E,ρ) μ.χ, $a \in E$

$A = \{a\}$, $\bar{A} = A$. Αν $b \in A'$: $B(b,r) \cap A$ απειρο $\forall r>0$

Ασκηση 2

(E,ρ) μ.χ $A \subseteq B \subseteq E$

Δειξτε οτι $A' \subseteq B'$

Λυση

Εστω $x \in A' \Rightarrow (B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ επειδη $A \subseteq B$

$(B(x,r) - \{b\}) \cap A \subseteq (B(x,r) - \{b\}) \cap B \neq \emptyset$

↳ απο ορισμο

Αρα $A' \subseteq B'$

Άσκηση 3

$A, B \subseteq (E,\rho)$. Δείξε ότι $(A\cup B)'$

• A' : παράγωγο σύνολο του A (σύνολο σ.σ.)

Λύση

Θα δείξουμε πρώτα $A'\cup B' \subseteq (A\cup B)'$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ισχύει ότι } A\subseteq A\cup B \Rightarrow A'\subseteq (A\cup B)' \\ &B\subseteq A\cup B \Rightarrow B'\subseteq (A\cup B)' \end{aligned}\right\} \Rightarrow A'\cup B' \subseteq (A\cup B)'$$

Τώρα δείχνω ότι $(A\cup B)' \subseteq A'\cup B'$

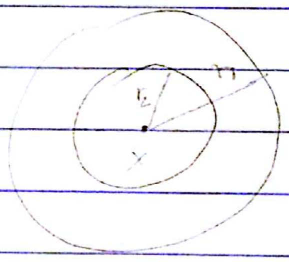
Έστω $x\in (A\cup B)' \Rightarrow (B(x,r)-\{x\})\cap (A\cup B)\neq \emptyset \quad \forall r>0$

Θα πάμε με άτοπο.

Έστω ότι $x\notin A'\cup B' \Rightarrow x\notin A'$ και $x\notin B'$

$\Rightarrow \exists r_1>0 \quad (B(x,r_1)-\{x\})\cap A=\emptyset$ και

$x\notin B' \Rightarrow \exists r_2>0 \quad (B(x,r_2)-\{x\})\cap B=\emptyset$



μικρότερη ακτίνα δεν τέμνει την ένωση

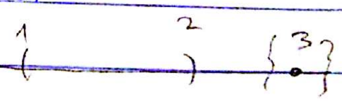
Θέτοντας $r=\min\{r_1,r_2\} \Rightarrow (B(x,r)-\{x\})\cap(A\cup B)=\emptyset$

άτοπο αφού $x\in (A\cup B)'$

Σχόλιο!

⊕ Σημειώστε στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ • $(a,b]' = [a,b]$

• $(a,+\infty)' = [a,+\infty)$



⊕ $A=(1,2)\cup\{3\}$ τότε $\bar{A}=[1,2]\cup\{3\}$

$A'=[1,2]$